**Axioma da infinitude e os naturais.**

**Axioma da infinitude** : Existe uma função injetora e não sobrejetora.

O leitor pode contestar e dizer que isso não define, em parte, um conjunto infinito. De fato, nessa formulação do axioma da infinitude, a captação real do infinito não é tão intuitiva de se ver, por isso irei tentar mostrar melhor porque é assim. O fato é que em todo conjunto X finito, para toda função S que e que essa mesma função é injetora, ela é, necessariamente, sobrejetora pelo simples fato de que se ela não for sobrejetora, existe pelo menos um que não tem uma antiimagem S[x]. Ora, mas sabemos que pela condição de injectividade, se o conjunto X tem cardinalidade |X| = n tal que(os naturais) – já que X é finito – todos os n devem ter imagens distintas; isso implica que não pode existir nenhum n que não tenha antiimagem, pois se existir, existiram n-1 elementos possíveis na imagem, algo que é contrário á hipótese de que existam n elementos distintos em X; contradição, logo X é **infinito**. Outra característica dessa função é a seguinte: Se essa função existe mesmo em X(e existe porque postulamos), todos os elementos de X possuem imagens distintas deles mesmo, caso contrário tal função não seria não sobrejetora, já que seria uma função identidade, logo bijectora e uma nova contradição com o postulado. Ora, já sabemos que tal função S associa para cada um S(x) diferente de x e diferente de qualquer S(y) para yx, o que só é verdade se X for um conjunto infinito e para todo se , logo S(x) S(y). Vamos tentar tirar proveitos de tais resultados de uma forma mais visível

**Teoremas 1.0 (** os chamados axiomas de Peano): Existe um conjunto N, com uma função  e outro conjunto 0 de modo que se satisfaça as seguintes propriedades:

1.

2. Se 

3. Não existe nenhum n tal que S(n) = 0

4.Se n,m  N, S(n) = S(m), logo m = n.

5. Se um conjunto AN tem a propriedade de que 0A e sempre que nA

S(n) A, logo A = N.

**Demonstrações:** Pois bem, a maioria dessas propriedades já foram provadas nas nossas elucidações do axioma da infinitude. Por exemplo, a propriedade 3 se segue simplesmente do fato de que a função é injectiva e ela gera sempre um conjunto diferente não nulo(0). 2 se segue da própria natureza infinita do nosso conjunto e pal própria definição de função : S(n) sempre deve pertencer ao conjunto X se não teríamos uma função mal formado, com algum elemento do domínio sem uma imagem, e assim nós vamos demonstrando os outros. Porém, perceba que os nossos teoremas fazem uma referência á um conjunto N e não á um X; isso ocorre porque o que queremos é o menor conjunto que tem as propriedades indutivas de X. Então vamos lá: vamos fazer uso do nosso axioma da infinitude. Seja  uma função injetora e sobrejetora de acordo com o axioma; vamos eleger uma elemento 0 de X que não tem uma antiimagem pela função S. Diremos que um conjunto AX é indutivo se 0  A e quando n  A podemos demonstrar que S(n)  A. Iremos chamar de J a classe de todos os conjuntos indutivos:

é indutivo}

Observe que , já que, no mínimo, X J. Seja um N tal que . Assim N X, pelo axioma das partes, N é um conjunto(veja que estamos pressupondo a teoria NGB de conjuntos, para mais detalhes ver as referências e, talvez, em outro momento, posso fazer algum post aqui comentando alguns axiomas e algumas teorias dos conjuntos). Perceba que 0  N, já que para todo conjunto  J, pela definição de conjunto indutivo e por N pertencer a J, 0  N. Claramente o mesmo para 2, já que N é indutivo. A propriedade 3 se segue porque nos escolhemos o 0 como o elemento de X que não possui uma antiimagem e, como 0 pertence a N, logo nos demonstramos o que queremos demonstrar. A propriedade 4 se segue pelo que já falamos da natureza indutiva e, principalmente, pela injectividade. A propriedade 5 se segue para N porque N é o menor conjunto indutivo de X e A é indutivo, logo N  A, mas se A  N por hipótese, logo A = N. Podemos chamar tais restrições da função S para N de : . É necessário se atentar para entender bem o quinto teorema, já que é o famoso princípio de indução. Perceba que quando se fala nesse princípio, sempre se fala sobre valer para 0 e supondo que vale para n então vale para S(n), logo vale para todos x que pertencem á N. Ora, do jeito que nós formulamos isso ainda não parece certo. O certo é que o que nós falamos é que, simplesmente, estamos dando condições suficientes para que, para qualquer dado conjunto, tal conjunto seja igual a N. Porém, ficará claro mais tarde que, nosso princípio, do jeito que nós formulamos, é base das provas por indução; o que se quer nessas provas não é provar que um conjunto A qualquer é igual a N. O que se deseja é provar que uma certa propriedade P aplicada á um x  N – digamos P(x) – vale para todo x  N.